GE (SEM-4)

⊠ সরলদোলন গতি :-

আমরা প্রতিদিন যে সব গতি প্রত্যক্ষ করি তাদের মৌলিকভাবে তিনটি ভাগে ভাগ করা যায় — (i) চলন (ii) ঘূর্ণন (iii) কম্পন। এখানে কম্পন গতি সম্পর্কে আলোচনা করা হবে।

• **পর্যাবৃত্ত গতি :-** যে গতি নির্দিষ্ট সময় অন্তর পুনরাবৃত্ত হয় তাকে পর্যাবৃত্ত গতি বলে। এক্ষেত্রে বস্তুটির গতিপথ নির্দিষ্ট থাকে এবং নির্দিষ্ট সময় অন্তর বস্তুটি গতিপথের একই বিন্দুকে একই দিক হতে অতিক্রম করে। এই গতিপথ যে সর্বদা সরলরেখা হবে এমনটা নয়। এই গতিপথ বৃত্তাকার বা উপবৃত্তাকারও হতে পারে।

উদাহরণ :- সুরশলাকার কম্পন, স্প্রিং-এর গতি, পৃথিবীর আহ্নিক গতি ইত্যাদি

পর্যাবৃত্ত গতি

→ রৈখিক পর্যাবৃত্ত গতি
⇓
পর্যাবৃত্ত গতি সরলরেখা অবলম্বন করে।

→ ঘূর্ণী পর্যাবৃত্ত গতি
⇓
পর্যাবৃত্ত গতি বৃত্ত বা উপবৃত্ত পথ অবলম্বন করে।

• **সরলদোলগতি :-** এই গতি দোলনগতির সরলতম রূপ। যেকোনো জটিল দোলনগতিকে বেশকিছু সরলদোলগতির সমন্বয়রূপে প্রকাশ করা যায়। এইজন্য এই গতি খুব গুরুত্বপূর্ণ।

সংজ্ঞা :- পর্যাবৃত্ত গতিতে গতিশীল কোন বস্তুর উপর প্রযুক্ত বল যদি এমনভাবে ক্রিয়া করে যাতে বস্তুটি সর্বদা সাম্য অবস্থান থেকে সরণের সমানুপাতিক হয় এবং তার দিক সর্বদাই সাম্য অবস্থানের দিকে থাকে তবে ঐ বস্তুর গতিকে সরলদোলগতি বলে।

ARNAB DAS

• বৈশিষ্ট্য :- (i) সরল দোলনগতি সম্পন্ন বস্তুর ত্বরণ তার সরণের সমানুপাতিক এবং তার অভিমুখ সর্বদা সাম্যাবস্থানের দিকে হয়।

(ii) এই গতি যেকোনো পর্যাবৃত্ত গতি যেকোনো প্রত্যানয়ক বলের প্রভাবে এই গতির সৃষ্টি হয়।

• 1 নং চিত্রে m ভরের একটি কণা XOX' বরাবর সরলদোলগতি সম্পন্ন করে। কিছু সময় দোলনের সময় t তে কণাটির সরণ $OP = x$ এবং এই সময়ে কণাটির উপর ক্রিয়াশীল প্রত্যানয়ক বল $= F$.

fig-1

$\therefore F \propto -x$

$\Rightarrow F = -kx$ [k = আনুপাতিক ধ্রুবক]

$\Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0}$ $\left[\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right]$ ——— (1).

(1) নং সমীকরণকে সরলদোলগতির অবকল সমীকরণ বলা হয়।

(1) নং সমীকরণ সমাধানের জন্য ধরা যাক, ট্রায়াল সমাধান $x = e^{mt}$

$\therefore$ (1) থেকে পাই $m^2e^{mt} + \omega^2 e^{mt} = 0$

$\Rightarrow m = \pm i\omega$ $[\because e^{mt} \neq 0]$

m-এর মান

লিনিয়ার ডিফারেন্সিয়াল সমীকরণের সমাধানের ক্ষেত্রে আমরা ধরি হয়ে থাকে

ARNAB DAS

তাহলে (i) নং-এর সমাধান নিম্নলিখিত ভাবে লেখা যায় —

$$x = e^{0.t}\{A\cos\omega t + B\sin\omega t\}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = A\cos\omega t + B\sin\omega t} \quad \text{---------- (ii)}$$

যুক্তঃ x রাশিটা cos এবং sine -এর সমন্বয়ে লেখা যায়, যেমন, ধরা যাক $A = R\sin\alpha$ এবং $B = R\cos\alpha$

$$\therefore x = R\sin\alpha\cos\omega t + R\cos\alpha\sin\omega t \quad \left[R = \sqrt{A^2+B^2}, \text{ এবং } \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)\right]$$

$$x = R\sin(\omega t + \alpha) \quad \text{---------- (iii)}$$

(iii) নং সমীকরণটিকে $x = R\cos(\omega t - \alpha)$ রূপেও লেখা যেতে, x এর এই দুটিই রূপান্তরই (i) নং সমীকরণের সমাধান হিসেবে গণ্য করা হয়। যেখানে R = সরলদোলন গতির বিস্তার এবং α = দশা ধ্রুবক।

এখানে $(\omega t + \alpha)$ রাশিটিকে সরলদোলন গতির দশা বলা হয়।

• case - I :- যদি $B = 0$ হয় তাহলে $R = A$ এবং $\alpha = 0$

$\therefore$ (iii) থেকে পাই $x = A\sin\omega t$ · এক্ষেত্রে দশাধ্রুবক (সমাধান) $t = 0$ সেকেন্ড $x = 0$ হয়। অর্থাৎ সরলদোলকের প্রথম মুহূর্তে সাম্যাবস্থান থাকে।

• case - II :- যদি $A = 0$ হয় তাহলে $R = B$ এবং $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ (iii) থেকে পাই $x = B\cos\omega t$ · এক্ষেত্রে $t = 0$ সেকেন্ড $x = B$ এবং $t = \frac{\pi}{2}$ সেকেন্ড $x = 0$ · অর্থাৎ সরলদোলন গতির প্রথম মুহূর্তে দোলকটি তার সর্বোচ্চ সরণে অবস্থান করে।

ARNAB DAS

• সরল সৌমান গতির বাস্তবিক করি :-

(i) গতিবেগ :- $x = R\sin(\omega t + \alpha)$

$\Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = R\omega\cos(\omega t + \alpha)$

$\Rightarrow v = R\omega\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \alpha)}$

$= R\omega\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}$

$\Rightarrow \boxed{v = \omega\sqrt{R^2 - x^2}}$

(ii) ত্বরণ : $x = R\sin(\omega t + \alpha)$

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = R\omega\cos(\omega t + \alpha)$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2\sin(\omega t + \alpha)$

$\boxed{a = -\omega^2 x}$ $\left[\because x = R\sin(\omega t + \alpha)\right]$

(iii) সর্বোচ্চ গতিবেগ ও সর্বোচ্চ ত্বরণ :-

যখন $x = 0$ হয়, তখন বেগের মান সর্বোচ্চ হয়। তাই সর্বোচ্চ বেগ $= v_{max}$ $\therefore \boxed{v_{max} = \omega R}$ । সর্বনিম্ন গতিবেগের ক্ষেত্রে $x = R$ হয়, তখনই $v_{min} = 0$

আবার, যখন $x = R$ হয়, তখন ত্বরণ সর্বোচ্চ হয়। $\therefore \boxed{a_{max} = -\omega^2 R}$ । সর্বনিম্ন ত্বরণের ক্ষেত্রে $x = 0$ হলে মুতরাং $a_{min} = 0$ হয়।

ARNAB DAS

(iv) গতিশক্তি :- আমরা আমরা জানি গতিশক্তি $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.

এখানে $v = \omega\sqrt{R^2 - x^2}$

$$\therefore T = \frac{1}{2}m\omega^2(R^2 - x^2)$$

যখন $E_{k\max} = \frac{1}{2}m\omega^2R^2$ $\left[\because x = 0\right]$

আর $E_{k\min} = 0$ $\left[\because x = R\right]$

সুতরাং সরল দোলন গতি সম্পন্ন কোন কণার গতিশক্তি উহার সাম্য অবস্থায় সর্বোচ্চ ও বিস্তারের প্রান্তবিন্দুতে শূন্য হয় অর্থাৎ সর্বনিম্ন হয়।

(v) স্থিতিশক্তি :- কণার ত্বরণ $= -\omega^2x$

$\therefore$ কণার উপর ক্রিয়াশীল বল $= F = -m\omega^2x$

এখন, কণার সরণ dx পরিমাণ হওয়ার জন্য প্রত্যানয়ক বলের বিরুদ্ধে কৃতকার্য $= dW = -F\,dx$

$$\Rightarrow dW = m\omega^2x\,dx$$

$$\Rightarrow W = \int_0^x m\omega^2x\,dx$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

এই পরিমাণ কার্য কণাটিতে সঞ্চিত স্থিতিশক্তির (E_p) পরিমাণ।

$$\therefore E_p = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

ARNAB DAS

(vi) মোট শক্তি :- সোজাসুজি কণাটির মোট শক্তি $E = E_K + E_P$

$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m\omega^2 (R^2 - x^2) + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$

$= \frac{1}{2} m\omega^2 R^2$

= ধ্রুবক।

সুতরাং সরল সোজাগতিতে রত কোনো কণার মোট শক্তি ধ্রুবক হয়, অর্থাৎ সময় যায় যে অবস্থানের গতি শক্তিক শক্তির সংরক্ষণশীল সূত্র মেনে চলে।

(vii) গড় গতিশক্তি :- পূর্ণ সোজান সমন্বয় সরল সোজা গতিতে রত কোনো কণার

গড় গতিশক্তি $\overline{E_K} = \frac{1}{T} \int_0^T E_K \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \cos^2(\omega t + \alpha) dt$

এখন $\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t + \alpha) dt = \frac{1}{T} \frac{1}{2} \int_0^T \{1 + \cos[2(\omega t + \alpha)]\} dt$

$= \frac{1}{2T} \left[t + \frac{\sin 2(\omega t + \alpha)}{2\omega} \right]_0^T$

$= \frac{1}{2T} \left[T + \frac{\sin 2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T + \alpha\right)}{2\omega} - 0 \right]$

$= \frac{1}{2T} \cdot T \quad [\because \sin n\pi = 0]$

$= \frac{1}{2}$

$\therefore \overline{E_K} = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} m\omega^2 R^2$

(viii) গড় স্থিতিশক্তি :- $\overline{E_P} = \frac{1}{T} \int_0^T E_P dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \sin^2(\omega t + \alpha) dt$

উপরের আলোচনা অনুসরণ করে পাই $\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \alpha) dt = \frac{1}{2}$

$\therefore \overline{E_P} = \frac{1}{4} m\omega^2 R^2$. সুতরাং $\overline{E_P} = \overline{E_K}$

ARNAB DAS