ফুরিয়ার সিরিজের প্রয়োগ :-

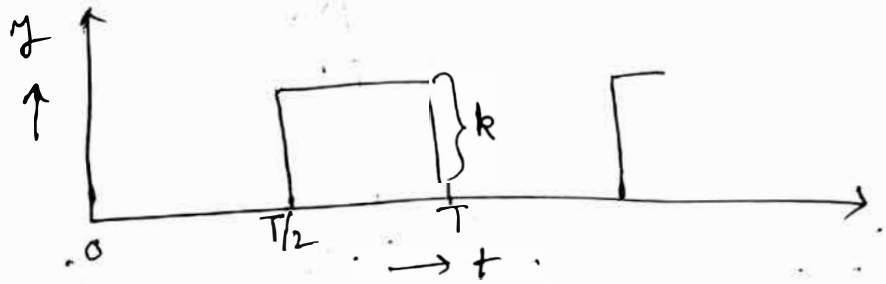
i) Square wave :-

ধরা যাক একটা কম্পমান রাশি যাকে নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করা যায় —

$$y = 0 \quad \text{for } 0 \le t \le \frac{T}{2}$$

$$= k \quad \text{for } \frac{T}{2} \le t \le T$$

উপরোক্ত রাশিটিকে তরঙ্গ রূপে লেখা হলে চেহারা যায় —



এখানে আমাদের ফুরিয়ার সহগগুলির মান নির্ণয় করতে হবে,

$$\therefore a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} y\,dt + \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} y\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} k\,dt$$

$$= \frac{k}{2}$$

এবং $a_s = \frac{2}{T}\int_0^T y \cos s\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T}$

$$= \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} k \cos s\omega t\,dt$$

$$\Rightarrow a_s = \frac{2}{T}\frac{k}{s\omega T}\left[\sin s\omega t\right]_{T/2}^{T} = \frac{-k}{s\omega T}\left[\sin 2s\pi - \sin s\pi\right] = 0$$

Now $$b_s = \frac{2}{T}\int_0^T y \sin s\omega t\, dt = \frac{2}{T}\left[\int_0^{T/2} y\sin s\omega t\, dt + \int_{T/2}^{T} y \sin s\omega t\, dt\right]$$

$$= \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} k \sin s\omega t\, dt$$

$$= -\frac{2k}{s\omega T}\left[\cos s\omega t\right]_{T/2}^{T}$$

$$= -\frac{2k}{s\omega T}\left(\cos 2s\pi - \cos s\pi\right)$$

If s = odd or s = even

$$b_s = -\frac{2k}{s\omega T}\left(1 - (-1)\right)$$

$$= -\frac{4k}{2s\pi} \quad \left[\omega T = \frac{2\pi}{T}\cdot T = 2\pi\right]$$

$$= -\frac{2k}{s\pi}$$

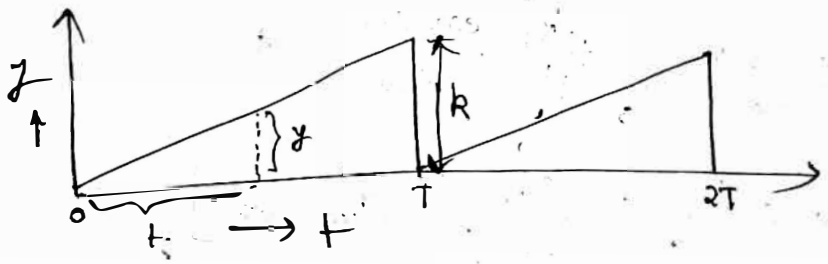
যদি s = যুগ্ম হয় $b_s = -\frac{2k}{s\omega T}\left(1-1\right) = 0$

সুতরাং সমাধান $y = \frac{K}{2} - \frac{2K}{\pi}\sum_{s=1,3,5\cdots}^{\infty} \frac{\sin s\omega t}{s}$

$$\Rightarrow y = \frac{k}{2} - \frac{2k}{\pi}\left(\sin \omega t + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \frac{\sin 5\omega t}{5} + \cdots\right)$$

(ii) Saw-Tooth wave :-

এক্ষেত্রে সমাধি 0 থেকে T সময়ে মধ্যে ফলাফলকে k পর্যন্ত সুষম ভাবে বৃদ্ধি পায়। অর্থাৎ সমাধি রাখতে নিম্নলিখিতভাবে প্রকাশ করা যায় —



এখন যদি যেকোনো সময় t এ সমাধি মান y হয় তাহলে সমীকরণ লেখা যায় —

$$\frac{y}{k} = \frac{t}{T} \Rightarrow y = \frac{k}{T}t$$

এখন $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{k}{T}t\,dt = \frac{k}{T^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^T = \frac{k}{2}$

$$a_s = \frac{2}{T}\int_0^T y\cos s\omega t\,dt = \frac{2k}{T^2}\int_0^T t\cos s\omega t\,dt$$

$$\Rightarrow a_s = \frac{2k}{T^2}\left[\frac{t}{sw}\sin sw t\right]_0^T - \frac{2k}{sw T^2}\int_0^T \sin s\omega t\, dt$$

$$= \frac{2k}{T^2}\left[\frac{t\sin sw t}{sw}\right]_0^T + \frac{2k}{s^2\omega^2 T^2}\left[\cos sw t\right]_0^T$$

$$= \frac{2k}{T^2}\left[\frac{T\sin 2\pi s}{sw} - 0\right] + \frac{2k}{s^2\omega^2 T^2}\left[\cos 2\pi s - \cos 0\right]$$

$$= 0$$

$$b_s = \frac{2}{T}\int_0^T y \sin sw t\, dt$$

$$= \frac{2k}{T^2}\int_0^T t\sin sw t\, dt$$

$$= \frac{2k}{T^2}\left[-\frac{t\cos sw t}{sw}\right]_0^T + \frac{2k}{T^2}\int_0^T \frac{\cos sw t}{sw}\, dt$$

$$= -\frac{2kT}{T^2 sw}\left[t\cos sw t\right]_0^T + \frac{2k}{s^2\omega^2 T^2}\left[\sin sw t\right]_0^T$$

$$= -\frac{2kT}{sw T^2}\left[T\cos 2\pi s - 0\right] + \frac{2k}{s^2\omega^2 T^2}\left[\sin 2\pi s - \sin 0\right]$$

$$= -\frac{2kT}{sw T^2}$$

$$= -\frac{2k}{sw T} = -\frac{k}{s\pi}$$

$$\therefore y = \frac{k}{2} - \frac{k}{\pi}\sum_{s=1,2,3\ldots}^{\infty}\frac{\sin sw t}{s}$$

$$= \frac{k}{2} - \frac{k}{\pi}\left(\sin\omega t + \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} + \cdots\right)$$