স্বাভাবিক ও অবরুদ্ধ কম্পন :-

আমরা জানি যে সরল দোল গতিসম্পন্ন কণার মৌ যান্ত্রিক শক্তি ধ্রুবক হয়। সুতরাং উদ্দীপ্ত বল সরিয়ে নিলেও কণাটি স্থির বিন্দুর ও একই কম্পাঙ্কে কম্পিত হতে থাকে। এভাবে বাহ্যিক কোন প্রভাব ছাড়াই যখন কোন বস্তু নিজস্ব কম্পাঙ্কে কম্পিত হয় তখন সেই কম্পনকে 'স্বাভাবিক কম্পন' বলে। এই প্রকার কম্পন সংবাহক বস্তুর ওর, ঘনত্ব, স্থিতিস্থাপকতা, আকার ইত্যাদির ওপর নির্ভর করে।

কিন্তু এমন কম্পন বাস্তবে পাওয়া যায় না। কারণ আদর্শ স্বাভাবিক কম্পন হলে তা অনন্তকাল ধরে চলতে থাকবে, যা বাস্তবে সম্ভব নয়। কারণ বস্তুর কম্পনের বিস্তার বিভিন্ন ঘর্ষণজনিত বাধার জন্য ধীরে ধীরে কমতে থাকে এবং একসময় বস্তুটি স্থির হয়ে যায়। এইরূপ বাধাজনিত বলকে 'অবমন্দন' বলা হয় এবং এরকম সকল স্বাভাবিক কম্পনকে 'অবমন্দিত কম্পন' বলে।

অবমন্দন কম্প বলে বস্তুর বিস্তার সময়ের সাথে ধীরে ধীরে কমতে থাকে। অবমন্দনের কম্পনের গাণিতিক বিশ্লেষণের সাহায্যে বিভিন্ন প্রকার অবমন্দিত গতির পরিচয় পাওয়া যায়।

অবমন্দিত গতির গাণিতিক বিশ্লেষন :-

দেখা যায় যে বাধাজনিত বলসমূহ মূলত বস্তুর তাৎক্ষণিক বেগের সমানুপাতিক, সুতরাং বস্তুর ওপর ক্রিয়াশীল বিভিন্ন বল —

(i) বাহ্যিক ভারসাম্য বল = $m\frac{d^2x}{dt^2}$

(ii) বিভিন্ন বাধাজনিত বল = $-k\frac{dx}{dt}$

(iii) প্রত্যানয়ক বল = $-\mu x$

সুতরাং অবমন্দিত গতির অবকল সমীকরণ হয় —

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} - \mu x$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0}, \quad \frac{k}{m} = 2b \text{ এবং } \frac{\mu}{m} = \omega^2 \quad \text{---------- (1)}$$

ARNAB DAS

ধরা যাক (1) নং সমীকরণের একটি পরীক্ষামূলক সমাধান $x = Ae^{\alpha t}$ সুতরাং (1) হতে পাই —

$$\frac{d^2}{dt^2}(Ae^{\alpha t}) + 2b\frac{d}{dt}(Ae^{\alpha t}) + \omega^2 Ae^{\alpha t} = 0$$

$$\Rightarrow Ae^{\alpha t}(\alpha^2 + 2b\alpha + \omega^2) = 0$$

$$\because Ae^{\alpha t} \neq 0 \quad \therefore \alpha^2 + 2b\alpha + \omega^2 = 0 \quad \text{---------- (2)}$$

(2) নং সমীকরণটি (1) নং-এর সমাধানের জন্য সহায়ক সমীকরণ।

$\therefore$ (2) নং হতে পাই $\alpha = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$

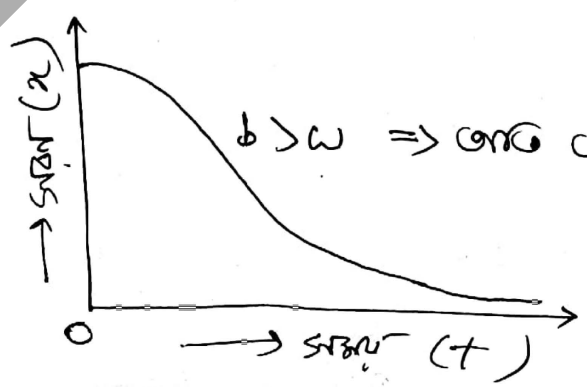
$\therefore$ (2) নং-এর সমাধান হবে — $x = c_1 e^{(-b+\sqrt{b^2-\omega^2})t} + c_2 e^{(-b-\sqrt{b^2-\omega^2})t}$

$$\Rightarrow x = e^{-bt}\left(c_1 e^{\sqrt{b^2-\omega^2}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{b^2-\omega^2}\,t}\right) \quad \text{---------- (3)}$$

(3) নং সমীকরণে c_1 ও c_2 দুটি ধ্রুবক, এই সমীকরণগুলিতে b রাশিটিকে অবমন্দন ধ্রুবক বলা হয়, এর তথা অবমন্দনের মান 3 প্রকারে নির্ণয় করা, b-এর মানের তথা নির্ণয় করে বিভিন্ন প্রকারের গতি দেখা যায় —

(a) $b > \omega$ অর্থাৎ অবমন্দনের মান খুব বেশি :-

এক্ষেত্রে $\sqrt{b^2-\omega^2} > 0$ = ধনাত্মক রাশি, সুতরাং (3) নং সমীকরণ হতে এটা স্পষ্ট যে বস্তুর সরণ সময়ের সাথে সাথে সুচারুভাবে হ্রাস পায়, কখনো অতিক্রান্ত পরিবর্তন না করে সরল হতে থাকে, এই প্রকার গতিকে অবমন্দিত গতি বলা হয়।



ARNAB DAS

(b) $b < \omega$ অবস্থায় অবমন্দিত স্পন্দন সূত্র প্রদান করা :-

যেহেতু $\sqrt{b^2-\omega^2} = i\sqrt{\omega^2-b^2}$ $\left[\because i = \sqrt{-1} = \text{কাল্পনিক রাশি}\right]$

$$\therefore x = e^{-bt}\left(A_1 e^{i\sqrt{(\omega^2-b^2)}\,t} + A_2 e^{-i\sqrt{(\omega^2-b^2)}\,t}\right)$$

$$= e^{-bt}\left\{A_1\left(\cos\sqrt{(\omega^2-b^2)}\,t + i\sin\sqrt{(\omega^2-b^2)}\,t\right) + A_2\left(\cos\sqrt{(\omega^2-b^2)}\,t - i\sin\sqrt{(\omega^2-b^2)}\,t\right)\right\}$$

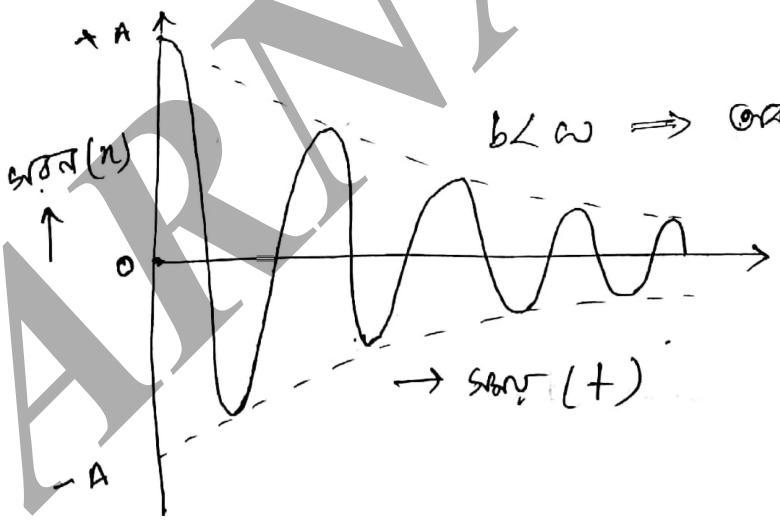
$$= e^{-bt}\left\{(A_1+A_2)\cos\sqrt{(\omega^2-b^2)}\,t + i(A_1-A_2)\sin\sqrt{(\omega^2-b^2)}\,t\right\}$$

$$= e^{-bt}\left\{A\cos\sqrt{(\omega^2-b^2)}\,t\cos\delta + A\sin\sqrt{(\omega^2-b^2)}\,t\sin\delta\right\}$$

তাহলে সমীকরণ $A_1+A_2 = A\cos\delta$ এবং $i(A_1-A_2) = A\sin\delta$

$$\therefore x = Ae^{-bt}\cos\left\{\sqrt{(\omega^2-b^2)}\,t - \delta\right\} \quad \text{——} \quad (4)$$

(4) নং সমীকরণটি অবমন্দিত দোলনের নির্দেশ করে, এখানে e^{-bt} রাশিটিকে প্রকৃত বিস্তার বলা হয় যার মান কালের সাথে A এর মান পরিবর্তন করে।



$b < \omega \Rightarrow$ অবমন্দিত দোলন।

ARNAB DAS

(c) $b \to \omega$ অবস্থায় অবমন্দন স্পন্দনের সমীকরণ ও তার আলোচনা :-

যদি $b \to \omega$ হয় তাহলে $\sqrt{b^2-\omega^2} \cong h$ ধরা যায়, h = খুব ছোট একটি রাশি।

$$\therefore x = e^{-bt}\left(A_1 e^{\sqrt{(b^2-\omega^2)}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{(b^2-\omega^2)}\,t}\right)$$

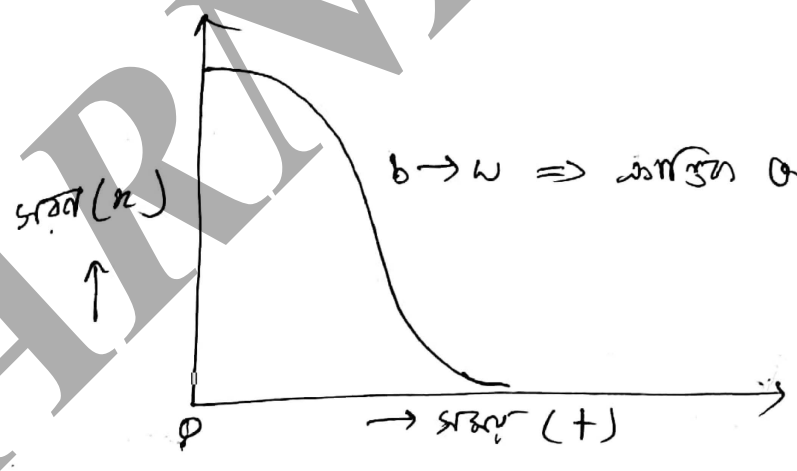
$$= e^{-bt}\left(A_1 e^{ht} + A_2 e^{-ht}\right)$$

$$= e^{-bt}\left\{A_1(1+ht) + A_2(1-ht)\right\} \quad \left[\begin{array}{l} h \text{ খুব ছোট হলে} \\ e^x = (1+x) \\ \text{হওয়ার জন্য} \end{array}\right]$$

$$= e^{-bt}\left\{(A_1+A_2) + (A_2-A_1)ht\right\}$$

$$= e^{-bt}(A + Bt) \quad \left[\begin{array}{l} (A_1+A_2) = A \text{ এবং} \\ (A_2-A_1)h = B \end{array}\right] \quad \text{---(5)}$$

(5) নং সমীকরণ অনুযায়ী বস্তুর সরণ সময়ের সঙ্গে সাম্যাবস্থান থেকে ক্রমশ বাড়ে। এমতাবস্থায় বস্তুটির গতি ক্রমশ অবমন্দিত হয়, এই গতিকে বলবিদ্যায় ক্রান্তিক অবমন্দিত গতি বলা হয়।



ARNAB DAS