## 4. Barrier penetration : Square Wall

নিউক্লিয়াস থেকে $\alpha$- decay প্রক্রিয়ার classical mechanics -এর সাহায্যে ব্যাখ্যা করা যায় না। $\alpha$- particle -এর গতিশক্তি অপেক্ষাকৃত Repulsive barrier wall -এর উচ্চতার অনেক বেশি। Quantum mechanics -এর Barrier penetration বা Tunnel effect- এর সাহায্যে Gamow, Condon এবং Gurney, $\alpha$- decay প্রক্রিয়ার ব্যাখ্যা প্রদান করেছেন।

Tunnel effect -এর সাহায্যে potential barrier (Wall) এর চাইতে অনেক কম গতি সম্পন্ন $\alpha$- particle নিউক্লিয়াসের বাইরে চলে আসতে পারে। এবং বাইরে আসার Probability শূন্য থাকলেও তা কোনোই শূন্য নয়।

বিভবটির (Fig3.) গাণিতিক রূপ

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a \\ V, & a < r < b \\ 0, & r > b \end{cases} \quad (1)$$

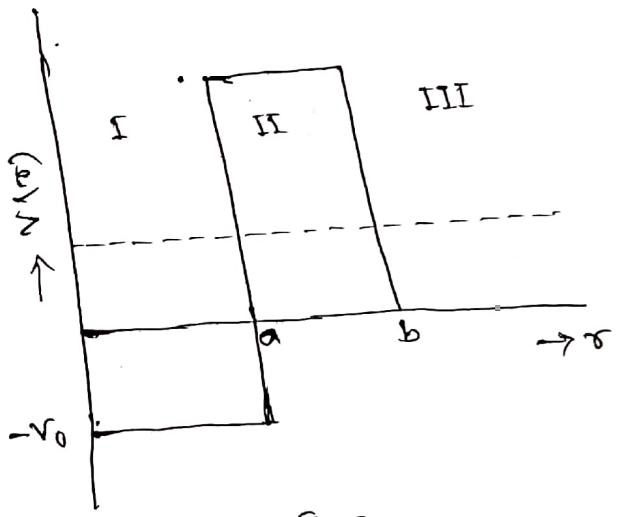


Fig3.

Daughter নিউক্লিয়াস কে Repulsive coulomb potential wall -এর উচ্চতা হচ্ছে V এবং বেধ (Width) $L = b - a$। $V_0$ হচ্ছে Alpha- Nucleus বিভবের $\left(\frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right)$ গভীরতার এবং optical model potential -এর গভীরতার চাইতে অনেক কম, ফলে বর্তমান ক্ষেত্রে ground state level টি Unbound. তাই Fig3. তে $|V_0| < V$ দেখানো হয়েছে।

বর্তমান ক্ষেত্রে Radial schrödinger equation টি হচ্ছে,

Scanned with CamScanner

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\{E - V(r)\}\psi(r) = 0 \qquad (2)$$

এখানে m হচ্ছে $\alpha$-particle এবং daughter nucleus-এর Reduced mass. আমরা করি (1) নং সম্পর্ক দ্বারা প্রকাশিত potential-এর তিনটি অংশগুলির Wave number হচ্ছে যথাক্রমে $K_1$, $K_2$ এবং $K_3$। যেখানে

$$K_1^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 + E) \qquad \text{Region I}$$

$$k_2^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V - E) \qquad \text{Region II} \qquad (3)$$

এবং $k_3^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ Region III

এখন (3) নং সম্পর্ক ব্যবহার করে schrodinger equation গুলি হবে,

$$\frac{d^2\psi_I(r)}{dr^2} + K_1^2\psi_I(r) = 0$$

$$\frac{d^2\psi_{II}(r)}{dr^2} + K_2^2\psi_{II}(r) = 0 \qquad (4)$$

$$\frac{d^2\psi_{III}(r)}{dr^2} + K_3^2\psi_{III}(r) = 0$$

সমীকরণ তিনটির Physically significant solution হচ্ছে,

$$\psi_I(r) = A_1 \sin K_1 r \qquad [\because \psi_I(r) = 0 \text{ at } r = 0]$$

$$\psi_{II}(r) = A_2 e^{K_2(r-a)} + A_2' e^{-K_2(r-a)} \qquad (5)$$

$$\psi_{III}(r) = A_3 e^{iK_3(r-b)} \qquad [\because \text{there is no reflected wave}]$$

At the boundaries, i.e. at $r = a$ and $r = b$, the wave function should be continuous. so,

Scanned with CamScanner

$$\psi_I(r=a) = \psi_{II}(r=a) \quad \text{and} \quad \left.\frac{d\psi_I}{dr}\right|_{r=a} = \left.\frac{d\psi_{II}}{dr}\right|_{r=a}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} A_1 \sin k_1 a &= A_2 + A_2' \quad \text{এবং} \\ A_1 k_1 \cos k_1 a &= k_2 (A_2 - A_2') \end{aligned}\right\} \qquad (6a)$$

similarly, $\psi_{II}(r=b) = \psi_{III}(r=b)$ and $\left.\frac{d\psi_{II}}{dr}\right|_{r=b} = \left.\frac{d\psi_{III}}{dr}\right|_{r=b}$

i.e.

$$\left.\begin{aligned} A_2 e^{k_2 L} + A_2' e^{-k_2 L} &= A_3, \quad \text{এবং} \\ k_2 \left[A_2 e^{k_2 L} - A_2' e^{-k_2 L}\right] &= i k_3 A_3 \end{aligned}\right\} \qquad (6b)$$

(6a) সমীকরণ দুটি যোগ করে,

$$A_1 \left[k_2 \sin k_1 a - k_1 \cos k_1 a\right] = 2 k_2 A_2' \quad \ldots \quad (7)$$

(6b) সমীকরণ দুটি যোগ করে

$$A_3 (k_2 - i k_3) = 2 k_2 A_2' e^{-k_2 L} \quad \ldots \quad (8)$$

(7) এবং (8) নং সমীকরণ দুটি যোগ করে

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{k_2 \sin k_1 a - k_1 \cos k_1 a}{k_2 - i k_3} e^{-k_2 L} \quad \ldots \quad (9)$$

Therefore, probability of barrier penetration from region I to region III is

$$P = \left|\frac{A_3}{A_1}\right|^2 = \frac{(k_2 \sin k_1 a - k_1 \cos k_1 a)^2}{k_2^2 + k_3^2} e^{-2k_2 L}$$

$$= \frac{(k_2 \sin k_1 a - k_1 \cos k_1 a)^2}{\frac{2mV}{\hbar^2}} e^{-2k_2 L} \quad \ldots \quad (10)$$

$$\left[\because k_2^2 + k_3^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V-E) + \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2mV}{\hbar^2}\right]$$

Since, $k_2 L \gg 1$, so $P$ is very small but not zero.

Scanned with CamScanner