CLASS - GE SEM 4

■ Fourier's Theorem :-

Any single-valued periodic function can be expressed as the sum of simple harmonic terms having frequencies which are multiples of that of the given function.

• সাধারণভাবে একটা পর্যাবৃত্ত রাশির সাধারণ রূপ $y(t)$ কে ফুরিয়ার থিয়োরেম অনুযায়ী নিম্নলিখিত ভাবে লেখা যায় –

$$y(t) = a_0 + a_1\cos\omega t + a_2\cos 2\omega t + \cdots + b_1\sin\omega t + b_2\sin 2\omega t + \cdots$$

$$\Rightarrow y(t) = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s\cos s\omega t + \sum_{s=1}^{\infty} b_s\sin s\omega t$$

$$\Rightarrow y(t) = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty}\left[a_s\cos s\omega t + b_n\sin s\omega t\right] \quad \text{——— (1)}$$

(1) নং সমীকরণে $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ রাশিগুলিকে ফুরিয়ার ধ্রুবক বা ফুরিয়ার সহগ বলা হয়। এদের মান নিম্নলিখিত সমাকলনের মাধ্যমে নির্ণয় করা যায়

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y\,dt \;;\; a_s = \frac{2}{T}\int_0^T y\cos s\omega t\,dt \;\&\; b_s = \frac{2}{T}\int_0^T y\sin s\omega t\,dt$$

এখানে $y(t)$ রাশিকলনীটি যতক্ষণ নিয়ে 2π T. সেই জন্য সমাকলনের ব্যবধান 3 যেকোনো ধ্রুবক যেখানে T ≥ 0.

ARNAB DAS

• ফুরিয়ার ধ্রুবকের মান নির্ণয় :—

(i) a_0-এর মান নির্ণয় —

আমরা জানি,

$$y = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos swt\, dt + \sum_{s=1}^{\infty} b_s \sin swt\, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^T y\,dt = \int_0^T a_0\,dt + \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^T a_s \cos swt\,dt + \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^T b_s \sin swt\,dt$$

[উভয় পার্শ্বে সমাকলন করে পাই]

এখন $\int_0^T \cos swt\,dt = \left[\frac{\sin swt}{sw}\right]_0^T = \frac{1}{sw}\left(\sin s\omega\frac{2\pi}{T}\cdot T - \sin s\frac{2\pi}{T}\cdot 0\right)$

$$= \frac{1}{sw}(\sin 2s\pi - \sin 0)$$

$$= 0$$

একইভাবে $\int_0^T \sin swt\,dt = 0$

$$\therefore \int_0^T y\,dt = a_0 \int_0^T dt = a_0 T$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T y\,dt} \quad \text{——— (2)}$$

(ii) a_s-এর মান নির্ণয় :-

$$y = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos swt\,dt + \sum_{s=1}^{\infty} b_s \sin swt\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^T y \cos swt\,dt = a_0 \int_0^T \cos swt\,dt + \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^T a_s \cos^2 swt\,dt$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^T b_s \cos swt \sin swt\,dt$$

ARNAB DAS

এখন $\int_0^T \cos s\omega t \, dt = 0$ [a_0-এর মান নির্ণয় করতে ব্যবহৃত]

$$\therefore \int_0^T \cos^2 s\omega t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^T (1 + \cos 2s\omega t) \, dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\sin 2s\omega t}{2s\omega}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2}\left[T + \frac{1}{2s\omega}\sin 2s \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T - 0 - \frac{\sin 0}{2s\omega}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[T + \frac{1}{2s\omega}\sin 4s\omega\right]$$

$$= \frac{T}{2}$$

এবং $\int_0^T \sin s\omega t \cos s\omega t \, dt = \frac{1}{2}\int_0^T \sin 2s\omega t \, dt$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos 2s\omega t}{2s\omega}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2s\omega}\cos 2s \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot T + \frac{\cos 0}{2s\omega}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2s\omega} + \frac{1}{2s\omega}\right]$$

$$= 0$$

$$\therefore \int_0^T y \cos s\omega t \, dt = 0 + a_s\frac{T}{2} + 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_s = \frac{2}{T}\int_0^T y \cos s\omega t \, dt}$$

ARNAB DAS

• b_s -এর মান নির্ণয় :-

$$y = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos s\omega t\, dt + \sum_{s=1}^{\infty} b_s \sin s\omega t\, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^T y \sin s\omega t\, dt = a_0 \int_0^T \sin s\omega t\, dt + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \int_0^T \sin s\omega t \cos s\omega t\, dt + \sum_{s=1}^{\infty} b_s \int_0^T \sin^2 s\omega t\, dt$$

এখন, $\int_0^T \sin s\omega t\, dt = \left[-\frac{\cos s\omega t}{s\omega} \right]_0^T = -\frac{1}{s\omega}(\cos 2\pi s - \cos 0) = 0$

আবার, $\int_0^T \sin s\omega t \cos s\omega t\, dt = 0$ [a_s -এর মান নির্ণয় করার জন্য]

আবার, $\int_0^T \sin^2 s\omega t\, dt = \frac{1}{2}\int_0^T (1 - \sin 2s\omega t)\, dt$

$$= \frac{1}{2}\left[t + \frac{\cos 2s\omega t}{2s\omega} \right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2}\left[T + \frac{\cos 2s.\frac{2\pi}{T}.T}{2s\omega} - 0 - \frac{\cos 0}{2s\omega} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[T + \frac{1}{2s\omega}\cos 4\pi s - \frac{\cos 0}{2s\omega} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[T + \frac{1}{2s\omega} - \frac{1}{2s\omega} \right]$$

$$= \frac{T}{2}$$

$$\therefore \int_0^T y \sin s\omega t\, dt = 0 + 0 + b_s \frac{T}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_s = \frac{2}{T}\int_0^T y \sin s\omega t\, dt}$$

ARNAB DAS

• Examples :-

1) নিম্নলিখিত রাশিমালার ফুরিয়ার সিরিজটা নির্ণয় করো।

$$f(x) = x \quad ; \quad 0 < x < 2\pi$$

Ans ফুরিয়ারের সিরিজের সিদ্ধান্তের অনুযায়ী $f(x)$ কে নিম্নলিখিত ভাবে প্রকাশ করা যায় —

$$f(x) = a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} a_s \cos sx + \sum_{s=1}^{\infty} b_s \sin sx$$

এখানে দিয়েছে রিজিয়ন $T = 2\pi$

সুতরাং $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = \pi$

$$a_s = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos sx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos sx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\,\frac{\sin sx}{s} - \int 1\cdot\frac{\sin sx}{s}\,dx\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin sx}{s} + \frac{\cos sx}{s^2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{\cos 2\pi s}{s^2} - \frac{1}{s^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2}\right]$$

$$= 0$$

ARNAB DAS

$$b_s = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin sx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin sx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos sx}{s} - \int 1\cdot\left(-\frac{\cos sx}{s}\right)dx\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\cos sx}{s} + \frac{\sin sx}{s^2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{2\pi\cos 2\pi s}{s} + \frac{\sin 2\pi s}{s^2} + 0 - 0\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(-\frac{2\pi\cdot 1}{s} + 0\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\times\frac{2\pi}{s}$$

$$= -\frac{2}{s}$$

$$\therefore f(x) = \pi + \sum_{s=1}^{\infty} 0\cdot\cos sx\,dx + \sum_{s=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{s}\right)\sin sx\,dx$$

$$= \pi + 0 - 2\left(\frac{\sin 1x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = \pi - 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots\right)}$$

ARNAB DAS