Semester:- III **Paper**:- GE-T-O1 **Topic**:- Vectors

ভেক্টর

ভৌতরাশিকে সাধারণত দুটি প্রধান শ্রেণীতে ভাগ করা যায়—(i) স্কেলার রাশি বা স্কেলার ও (ii) ভেক্টর রাশি বা ভেক্টর।

যে সব ভৌতরাশির কেবল মান আছে কিন্তু দিক নেই এবং যাদের মান নির্দেশতন্ত্র রূপান্তরে পরিবর্তিত হয় না তাদের **স্কেলার** বলা হয়। যেমন, দুটি স্থানের দূরত্ব, বস্তুর ভর, শক্তি, আধান, বস্তুর উষ্ণতা ইত্যাদি।

অন্যদিকে যে সব ভৌতরাশির মান ও দিক দুইই আছে এবং যাদের সাধারণ বীজগাণিতিক নিয়মে যোগ করা যায় না অর্থাৎ, ভেক্টরের সংযোজন সূত্র মেনে যোগ করা হয় তাদের **ভেক্টর** বলা হয়। যেমন, সরণ, বেগ, ত্বরণ, বল, তড়িৎক্ষেত্র, চুম্বকক্ষেত্র, মহাকর্ষীয় ক্ষেত্র ইত্যাদি।

ভেক্টরের অংকের আলোচনাকে সাধারণত দুটি অংশে ভাগ করা হয়—(1) ভেক্টর বীজগণিত ও (2) ভেক্টর কলন। বীজগণিত অংশে ভেক্টর সংযোজন, বিয়োজন, গুণন ও বিভাজন আলোচনা করা হয় এবং কলন অংশে ভেক্টর অবকলন ও সমাকলন আলোচনা করা হয়।

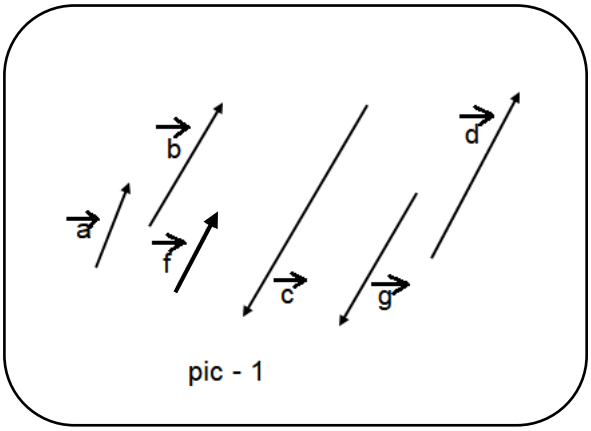
বিভিন্ন ধরনের ভেক্টর:-

(1) সদৃশ ভেক্টর: দুই বা তার বেশি ভেক্টরকে সদৃশ ভেক্টর বলা হয় যদি তাদের অভিমুখ একই কিন্তু মান অসমান হয়। 1 নং চিত্রে $\vec{a},\vec{b},\vec{d},\vec{f}$ সদৃশ ভেক্টর।

(2) সমান ভেক্টর: দুটি ভেক্টর সমান বলা হয় যদি তাদের মান ও দিক দুইই একই হয়। 1 নং চিত্রে $\vec{a},\vec{f}$ এর মান ও দিক একই হওয়ায় $\vec{a}=\vec{f}$

দুটি সমান ভেক্টরের আদিবিন্দু যে একই হবে এরকম কোন কথা নেই।

(3) অসদৃশ ডেক্টর: দুটি ভেক্টরের অভিমুখ বিপরীত ও মান ভিন্ন হলে তাদের অসদৃশ বলা হয়। $\vec{b},\vec{c}$ দুটি অসদৃশ ভেক্টর (চিত্র - 1)।



pic - 1

(4) বিপরীত বা ঋণাত্মক ভেক্টর: দুটি ভেক্টরের একই মান কিন্তু অভিমুখ বিপরীত হলে ভেক্টরদুটিকে বিপরীত ভেক্টর বলে। 1 নং চিত্রে $\vec{b},\vec{g}$ এর মান একই হলেও অভিমুখ বিপরীত তাই $\vec{b}=-\vec{g}$

(5) একক ভেক্টর: একটি ভেক্টরকে তার স্কেলার মান দিয়ে ভাগ করলে তাকে একক ভেক্টর বলে। স্পষ্টতই, একটি একক ভেক্টরের মান একক এবং যার অভিমুখ প্রদত্ত ভেক্টরের অভিমুখে। $\vec{A}$-এর অভিমুখে একক ভেক্টর নির্দেশ করতে $\vec{A}$-এর

ARNAB DAS

মাথার ওপর একটি টুপি বা মুকুট দেওয়া হয়। যেমন, $\hat{A}=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}\Rightarrow\vec{A}=|\vec{A}|\hat{A}$। অতএব, কোন ভেক্টরকে তার মানের সঙ্গে এর একক ভেক্টর গুণ করে প্রকাশ করা হয়।

(6) সমতলীয় ভেক্টর: একই তলে অবস্থিত ভেক্টরগুলিকে সমতলীয় ভেক্টর বলে।

(7) শূন্যমানের ভেক্টর: এটি এমন একটি ভেক্টর যার মান শূন্য ; স্পষ্টতই এর অভিমুখ অনির্ণয়ক। যেহেতু এটির মান শূন্য, একে $\vec{0}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

(8) ধ্রুবীয় ও অক্ষীয় ভেক্টর: ভেক্টরকে পুনরায় দুটি শ্রেণীতে ভাগ করা যায়, যথা—ধ্রুবীয় ও অক্ষীয় ভেক্টর।

যে ভেক্টরকে তার স্বাভাবিক দিক বরাবর রেখা দিয়ে নির্দেশ করাযায় তাকে **ধ্রুবীয় ভেক্টর (polar vector)** বলে। যেমন, সরণ, বেগ, ত্বরণ, রৈখিক ভরবেগ, তড়িৎক্ষেত্র ইত্যাদি।

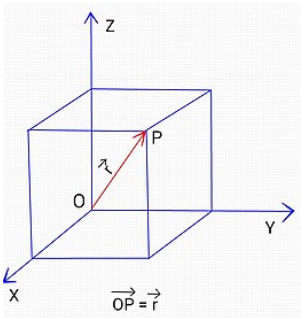
আবার, যে ভেক্টর ঘূর্ণনের সঙ্গে সম্পর্কিত এবং যার অভিমুখ ঘূর্ণন তলের লম্ব দিকে হয় তাদের **অক্ষীয় ভেক্টর (axial vector)** বলে। অক্ষীয় ভেক্টরের অভিমুখ নির্ণয় করার সহজ উপায় হল—একটি স্ক্রুকে অক্ষীয় ভেক্টরের ঘূর্ণন তলের অভিলম্বে ভেক্টরটির ঘূর্ণনের দিকে ঘুরালে স্ক্রু-এর চলন গতির অভিমুখ ঐ অক্ষীয় ভেক্টরের অভিমুখ নির্দেশ করে। কৌণিক বেগ, টর্ক, কৌণিক ভরবেগ ইত্যাদি অক্ষীয় ভেক্টরের উদাহরণ।

(9) স্বাধীন ভেক্টর: কোনো ভেক্টরের পাদবিন্দু যদি ইচ্ছামতো নির্ধারণ করা যায়, তাহলে সেই ভেক্টরকে স্বাধীন ভেক্টর বলে।

(10) **সীমাবদ্ধ ভেক্টর:** যে ভেক্টরের পাদবিন্দু নির্ধারিত থাকে তাকে সীমাবদ্ধ ভেক্টর বলে।

(11) **বিপ্রতীপ বা ব্যতিহার ভেক্টর:** সমজাতীয় দুটি সমান্তরাল ভেক্টরের একটির মান যদি অপরটির বিপরীত সংখ্যা হয় তবে তাদেরকে বিপ্রতীপ বা ব্যতিহার ভেক্টর বলে। যেমন: $\vec{A}=5\hat{i}$ ও $\vec{B}=\frac{1}{5\hat{i}}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়কে পরস্পরের বিপ্রতীপ বা ব্যতিহার ভেক্টর বলা হবে।

(12) **অবস্থান ভেক্টর:** প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে ঐ স্থানের কোন বিন্দুর অবস্থানকে নির্দেশ করার জন্য যে ভেক্টর ব্যবহার করা হয়, তাকে ঐ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলে। অবস্থান ভেক্টরকে অনেক সময় ব্যাসার্ধ ভেক্টর বলা হয় এবং $\vec{r}$ দিয়ে প্রকাশ করা হয়। চিত্রে O হচ্ছে প্রসঙ্গ কাঠামোর মূল বিন্দু এবং P যে কোন একটি বিন্দু। এখানে $\overrightarrow{OP}$ হল P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর এবং $\vec{r}=\overrightarrow{OP}$

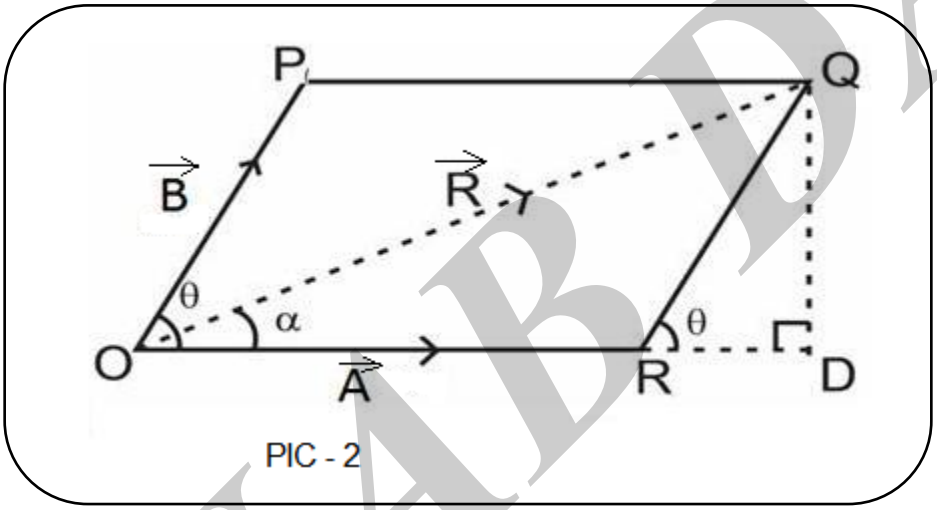


ARNAB DAS

❖ ভেক্টরের যোগ বা ভেক্টর সংযোজন

যেহেতু ভেক্টরের অভিমুখ আছে, তাই এদের স্কেলারের মত সহজ বীজগাণিতিক নিয়মে যোগ করা যায় না। দুই বা তার বেশি ভেক্টরের ফল যদি একটি ভেক্টর দিয়ে প্রকাশ করা যায় তবে সেই ভেক্টরটিকে ঐ ভেক্টরগুলির যোগফল বা লব্ধি ভেক্টর বলা হয়। দুটি ভেক্টরকে সামান্তরিক সূত্র এবং ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে যোগ করা যায়। তিন বা তার অধিক ভেক্টরকে বহুভূজ সূত্রের দ্বারা যোগ করা যায়।

সামান্তরিক সূত্র: দুটি ভেক্টর ($\vec{A}$ ও $\vec{B}$) যদি মানে ও দিকে একটি সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু দিয়ে সূচিত হয়, তবে ঐ বাহুদুটির ছেদবিন্দু দিয়ে আঁকা সামান্তরিকের কর্ণ ঐ ভেক্টরদুটির লব্ধি ভেক্টর $\vec{R}$ -এর মান ও অভিমুখ সূচিত করে।



PIC - 2

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

ΔOQR থেকে লেখা যায়, OQ $\leq$ OR + RQ

অর্থাৎ, $R \leq A + B$

ত্রিকোণমিতি প্রয়োগ করে দেখানো যায় যে,

$$R = \sqrt{(A^2 + B^2 + 2ABc\cos\theta)} \quad \text{এবং} \quad \tan\alpha = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

প্রমাণঃ- OPQR সামান্তরিকের OR দ্বারা $\vec{A}$ এবং OP দ্বারা $\vec{B}$ প্রকাশ করা হয়েছে। 2 নং চিত্রে সব রাশিগুলি চিহ্নিত করা হয়েছে। ΔOQD থেকে পাই $OQ^2 = OD^2+QD^2 = (OR+RD)^2 + QD^2$

$= OR^2 + RD^2 + 2OR.RD + QD^2$

ARNAB DAS

$\Rightarrow OQ^2 = OR^2 + (RD^2 + QD^2) + 2OR.\ RQ.\frac{RD}{RQ}$

$\Rightarrow OQ^2 = OR^2 + RQ^2 + 2OR.\ RQ.\ \cos\theta$

$\Rightarrow R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$

$\Rightarrow R = \sqrt{(A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta)}$

আবার $\tan\alpha = \frac{QD}{OD} = \frac{\frac{QD}{RQ}RQ}{OR + RD} = \frac{RQ\sin\theta}{OR + \frac{RD}{RQ}RQ} = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$

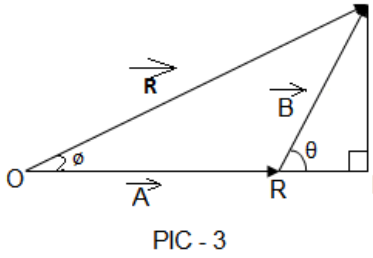
$\theta = 0$ হলে $\cos\theta = 1$, সুতরাং R = A + B অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় সমমুখী।

$\theta = 90^0$ হলে $\cos\theta = 0$, সুতরাং $R = \sqrt{(A^2 + B^2)}$ অর্থাৎ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমকোণে আনত।

$\theta = 180^0$ হলে $\cos\theta = -1$, সুতরাং $R = |A - B|$, অর্থাৎ A>B হলে R=A-B আবার A<B হলে R=B-A

$\theta = 180^0$ এবং A = B হলে R = 0, অর্থাৎ লব্ধি শূন্য হবে।

ত্রিভুজ সূত্র: একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত দুটি বাহু দুটি ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত করলে বিপরীতক্রমে গৃহীত তৃতীয় বাহুটি উক্ত ভেক্টর দুটির লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।



PIC - 3

ত্রিভুজের যে কোনো দুটি বাহু দ্বারা প্রকাশিত ভেক্টরের দিক যদি ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের দিকে (clockwise direction-এ) হয়, তবে তৃতীয় বাহু দ্বারা প্রকাশিত লব্ধির দিক ঘড়ির কাঁটার ঘূর্ণনের বিপরীত দিকে(anticlockwise direction-এ) হবে।

এখানে লক্ষণীয় যে লব্ধি ভেক্টরের পরম মান অপর দুটি ভেক্টরের পরম মানের সরাসরি যোগফলের সমান নয়।

চিত্র - 3-এ OQR ত্রিভুজটির ক্ষেত্রে,

ARNAB DAS

$$\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OQ}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{OQ} = 0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QO} = 0$$

অতএব তিনটি ভেক্টরের মান ও দিক যদি একটি ত্রিভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা সূচিত হয়, তবে ওই তিনটি ভেক্টরের লব্ধি শূন্য।

প্রমাণঃ- 3 নং চিত্রে OR-এর বর্ধিতাংশের ওপর Q বিন্দু হতে QD লম্ব টানা হয়েছে। অন্যান্য রাশিগুলি চিত্রে প্রদর্শিত হয়েছে।

ΔOQD থেকে লেখা যায়, $OQ^2 = OD^2 + QD^2$

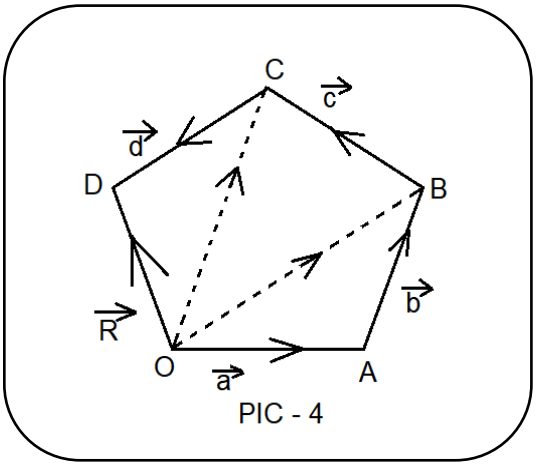
$$\Rightarrow OQ^2 = (OR+RD)^2 + QD^2$$
$$\Rightarrow OQ^2 = OR^2 + RD^2 + 2OR.RD + QD^2$$
$$\Rightarrow OQ^2 = OR^2 + (RD^2 + QD^2) + 2OR.\ RQ.\frac{RD}{RQ}$$
$$\Rightarrow OQ^2 = OR^2 + RQ^2 + 2OR.\ RQ.\ \cos\theta$$
$$\Rightarrow R^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$$
$$\Rightarrow R = \sqrt{(A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta)}$$

আবার

$$\tan\phi = \frac{QD}{OD} = \frac{\frac{QD}{RQ}RQ}{OR+RD} = \frac{RQ\sin\theta}{OR + \frac{RD}{RQ}RQ} = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}$$

বহুভুজ সূত্র: কতগুলি ভেক্টরের মান ও দিক যদি একটি বহুভুজের বা বদ্ধ বহুভূজী শৃঙ্খলের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলি দ্বারা প্রকাশ করা হয় তবে বিপরীতক্রমে গৃহীত অন্তিম বাহুটি ওই ভেক্টরগুলির লব্ধির মান ও দিক নির্দেশ করে।

4 নং চিত্রানুযায়ী বলা যেতে পারে, চারটি ভেক্টরকে যদি একটি পঞ্চভুজের ক্রমানুসারে গৃহীত চারটি বাহু $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ দ্বারা মানে ও দিকে প্রকাশ করা হয় তবে বিপরীতক্রমে গৃহীত অবশিষ্ট বাহু $\overrightarrow{OD}$ লব্ধি ভেক্টরের মান ও দিক নির্দেশ করে। ভেক্টরগুলি একই সমতলে না থাকলেও বহুভুজ সূত্রটি ব্যবহার করা যায় এবং



PIC - 4

ARNAB DAS

ভেক্টরগুলির যে-কোনো ভেক্টরকে ইচ্ছেমতো আগে পরে যোগ করলেও সর্বদা একই লব্ধি পাওয়া যায়।

ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে বহুভুজ সূত্রের প্রমাণ: ধরা যাক, $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ ভেক্টরগুলির মান ও দিক OABCD বহুভুজটির একইক্রমে গৃহীত $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$ বাহুগুলি দ্বারা প্রকাশিত হয়েছে।

ত্রিভুজ সূত্রানুসারে,

OAB ত্রিভুজে, $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$;

OBC ত্রিভুজে, $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

আবার, OCD ত্রিভুজে, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$$\Rightarrow \vec{R}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$$

সুতরাং, $\overrightarrow{OD}$ হল $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ ভেক্টরগুলির যোগফল বা লব্ধি এবং এই $\overrightarrow{OD}$ বাহুই হল বহুভুজটির বিপরীতক্রমে গৃহীত অবশিষ্ট বাহু। সুতরাং বোঝা গেল যে বহুভুজ সুত্রটি ত্রিভুজ সূত্রেরই একটি সম্প্রসারিত রূপ।

আবার, OABCD পঞ্চভুজটির ক্ষেত্রে,

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{OD}=0$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$$

অর্থাৎ, তিন বা ততোধিক ভেক্টরের মান ও দিক যদি একটি বদ্ধ বহুভূজের ক্রমানুসারে গৃহীত বাহুগুলির দ্বারা সূচিত করা যায় তবে ওই ভেক্টরগুলির লব্ধি শূন্য হবে।

ARNAB DAS